

Implementación de un ambiente virtual Blended Learning en la resolución de problemas verbales favoreciendo el uso de las representaciones matemáticas

Álvaro J. Delgado¹

Oscar H. Fonseca Ramirez²

¹Magister en Didáctica de las Ciencias
Fundación Universidad Autónoma
Bogotá (Colombia)

E-mail: alvarojosedelgado@gmail.com

²Docente investigador

Maestría en didáctica de las Ciencias
Fundación Universidad Autónoma
Bogotá (Colombia)

E-mail: oscar.fonseca@fuac.edu.co

Resumen. En procura de favorecer el uso de diferentes sistemas de representación para plantear y solucionar problemas verbales con ecuaciones lineales; se diseñó y evaluó una propuesta de enseñanza mediada por un ambiente de aprendizaje *blended learning*, que incluyó el uso de las representaciones planteadas por Fernández[5] Esta propuesta, se desarrolló bajo un enfoque constructivista; a partir de una investigación de corte cualitativo[12], enmarcado en un paradigma interpretativo [1]

Esta investigación se llevó a cabo con estudiantes de grado octavo; de edades que oscilan entre 13 y 16 años de edad de la I.E.D Jorge Soto del Corral, en una propuesta estructurada en seis sesiones que incluyó el favorecimiento del uso de los sistemas de representación *ensayo-error*; *parte-todo*; *gráfico* y *gráfico simbólico*; a través un ambiente de aprendizaje *blended learning*, que incluyó el uso de un simulador de dichos sistemas de representación; durante el desarrollo de estas etapas se observó *in situ* de manera sistemática el desempeño de los estudiantes frente al planteamiento y solución de problemas verbales.

Las conclusiones muestran que el diseño e implementación de un ambiente *blended learning*, favoreció la comprensión y el uso de los diferentes sistemas de representación planteados en estudiantes de grado octavo, posibilitando un mejor análisis de los problemas propuestos por medio del ambiente *blended learning*; generando en ellos un aprendizaje significativo, en donde el sistema de representación más utilizado por los estudiantes fue el sistema de representación ensayo- error; identificando adicionalmente, que las falencias en los pre saberes de los participantes específicamente en temas relacionados con geometría, dificultaron el uso de la estrategia propuesta.

Palabras clave: *blended learning (BL)*, *Sistemas de representación*, *problemas verbales*, *ecuaciones lineales*.

Abstract.

In order to favor the use of different systems of representation to pose and solve verbal problems with linear equations; a teaching proposal mediated by a blended learning environment that included the use of representations raised by Fernández (1997) was designed and assessed. This proposal was developed under a constructivist approach; From a qualitative research, Martínez (2006) framed in an interpretive paradigm Arnal, Del Rincón, & Latorre (1992).

This research was carried out with eighth secondary grade students; Ages ranging from 13 to 16 years old from the I.E.D Jorge Soto del Corral, in a six sessions structured proposal in which was included the favoring of the use of trial-error representation systems; Part-all; Graphic and symbolic graphics; through a blended learning environment,

which included the use of a simulator of such representation systems; During the development of these phases, the students' performance in relation to the raising and solution of verbal problems was systematically observed *in situ*.

The most relevant aspects of the conclusions show that the design and implementation of a blended learning environment, favored the understanding and the use of different systems of representation raised in eighth secondary grade students, enabling a better analysis of the problems proposed through the Blended learning environment; Generating in all of them a meaningful learning, in which the system of representation more used by the students; Was the trial-error representation system, further identifying that the shortcomings in the pre-knowledge of the participants specifically in topics related to geometry, made difficult the use of the proposed strategy.

Keywords: *Systems of representation, Blended learning (BL), verbal problems, linear equations.*

1 introducción

Con el fin de favorecer el uso adecuado de las tecnologías de la información y la comunicación para el aprendizaje del algebra, se diseñó un Ambiente Blended Learning con el objetivo de favorecer el uso de diferentes sistemas de representación para plantear y solucionar problemas verbales con ecuaciones lineales, generar estrategias pedagógicas que posibilitaran en el estudiante un aprendizaje significativo alineado con recursos tecnológicos, lo anterior; teniendo en cuenta que en las prácticas escolares, específicamente en el grado octavo, se evidenció en los educandos bajo desempeño y dificultad para plantear y solucionar problemas verbales que incluyen ecuaciones lineales de primer grado. La población objeto comprendió un grupo de ocho estudiantes del grado octavo de edades que oscilaron entre 13 y 16 años, de nivel socioeconómico 1 y 2 de la IED Jorge Soto del Corral perteneciente a la localidad Santa Fe.

La investigación de corte cualitativo a través de un estudio de caso colectivo enmarcado en un paradigma interpretativo; planteo como pregunta de investigación:

¿Qué características ha de tener una propuesta de enseñanza mediada por un ambiente Blended Learning con estudiantes de grado octavo, que favorezca el uso de diferentes sistemas de representación para plantear y solucionar problemas verbales con ecuaciones lineales?

Esta investigación incluyó seis sesiones denominadas: diagnóstica, explicativa, aplicación y comprobación, reconocimiento del ambiente virtual, y presentación del simulador y prueba de salida.

Cabe señalar que las dos últimas sesiones serán explicadas a profundidad en la presente ponencia las cuales atañen al ambiente virtual desarrollado e implementado exclusivamente para esta investigación. En donde, el diseño e implementación de un ambiente Blended Learning, ayudó a la comprensión y el uso de los diferentes sistemas de representación planteados en estudiantes de grado octavo, permitió identificar diferentes alternativas al plantear y resolver problemas verbales por medio de ecuaciones de primer grado con una incógnita, además se encontró que el sistema de representación más utilizado por los estudiantes, fue el sistema de representación ensayo- error; así como, el ambiente Blended Learning incentivó el aprendizaje significativo permitiendo en ellos un mejor análisis de los problemas propuestos.

2. Contenido del artículo

OBJETIVOS

Diseñar y evaluar una propuesta de enseñanza acerca del planteamiento y solución de problemas verbales que involucren ecuaciones lineales, favoreciendo el uso de diferentes representaciones mediada por un ambiente Blended Learning.

Diseñar actividades para solucionar problemas con ecuaciones lineales a través de un ambiente Blended Learning., utilizando diferentes registros de representación.

Implementar una propuesta en el aula que permita a los estudiantes trabajar con diferentes registros de representación en el planteamiento de problemas con ecuaciones lineales mediado por el ambiente Blended Learning diseñado.

MARCO TEÓRICO.

Ambiente virtual de aprendizaje (AVA)

Un ambiente hace referencia a la interacción del ser humano con el medio que le rodea lo cual involucra a quien aprende, en la reflexión de sus acciones con relación a las acciones de otros y al entorno natural, no se limita al espacio físico, sino que “se trata de un espacio de construcción significativa de la cultura” [4].

Se ha considerado que los recursos, materiales, diseño y aplicación del currículo, en relación docente – estudiante, no generan exactamente un ambiente educativo, en cambio, la interacción, acciones propias de los participantes en el proceso educativo, relaciones interpersonales, condiciones materiales, infraestructura, experiencias y vivencias, entre otras si constituyen un ambiente de aprendizaje el cual pertinentemente también es llamado ambiente educativo.

Este ambiente se propone algunos elementos como son: Planteamiento de problemas, diseño y ejecución de soluciones, capacidad analítica investigativa, trabajo en equipo, toma de decisiones y planeación del trabajo, habilidades y destrezas de lectura comprensiva y de expresión oral y escrita, capacidad de razonamiento lógico-matemático, capacidad de análisis del contexto social y político nacional e internacional, manejo de la tecnología informática y del lenguaje digital, conocimiento de idiomas extranjeros y capacidad de resolver situaciones problemáticas; por tanto, aplicable a todas las áreas del conocimiento y al alcance de la mayoría de personas.

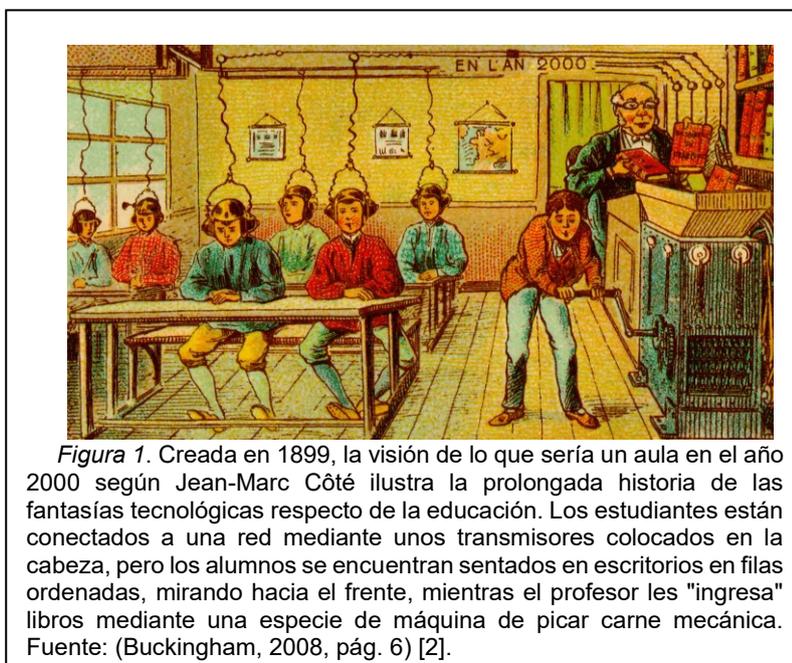
A finales del siglo XX el papel del docente se transforma a través de la virtualidad. “Así, mediante las TIC, se crea un espacio, lugar o aula virtual donde se produce el encuentro y en donde se llevan a cabo los intercambios comunicativos de profesores y alumnos en torno a los contenidos y tareas de aprendizaje” [3], por tanto, es a través de las TIC que el entorno de aprendizaje se considera un instrumento docente o una influencia no dirigida, en las conductas de los profesores, como los de los estudiantes, se intenta brindar un espacio agradable no solo desde la estética sino también desde el aprendizaje.

Sin embargo, “*el diseño de entornos virtuales para el aprendizaje debe ser analizado dentro del contexto de cambio y evolución de la sociedad*” (pág. 226) [8], debido a que en un contexto específico este diseño debe generar cierta riqueza intelectual en el participante, por esta razón los entornos virtuales de aprendizaje permiten a los docentes una formación permanente que contribuye a construir un conocimiento en forma colaborativa [9], lo que permite un aprendizaje de acuerdo al contexto y fortalece espacios de comunicación, el conocimiento implica una actualización constante de saberes donde

el nativo digital, es juzgado por lo que dice y produce en red [15]. De esta manera tanto el estudiante como el profesor deben fomentar un ambiente de aprendizaje donde la innovación y el conocimiento son el espacio esencial para lograr los objetivos esperados [9].

Por tanto, el papel del profesor debe cambiar desde una concepción puramente distribuidora de información y conocimiento hacia una persona que es capaz de crear y orquestar ambientes de aprendizaje complejos, intentando entonces motivar al aprendiz en entornos que: incorporen actividades de aprendizaje, dispositivos que permitan identificar características, funciones que proporcionen información y una estructura dinámica que permita trabajar con rapidez [3]. Es claro que el papel de la escuela en la actualidad debe motivar a los alumnos a través de espacios alejados netamente del entorno físico, es en este punto donde el maestro motiva espacios de comunicación y conocimiento fuera del aula de clase.

Blended learning



Es interesante la visión que el artista Jean Marc tenía del futuro, desde su realidad y como concibió una escuela 116 años en el futuro desde su imaginario, rescatando aun la labor del docente quien es mero transmisor de información, los estudiantes conectados a una máquina "computador" que procesa esa información y la envía por medio de una red que llega a cada estudiante, es una primera visión *a priori* de un aprendizaje mezclado o *blended learning* donde desde esa perspectiva, el profesor y la máquina trabajan unidos para "introducir" conocimiento [2].

Es importante resaltar esa visión anacrónica de la educación y su relación con la tecnología que Jean-Marc Côté predecía en aquella época para resaltar la importancia de los ambientes *blended learning* en la actualidad como ayuda a la labor docente en el proceso de enseñanza – aprendizaje y no como reemplazo del mismo.

Una definición de *blended learning* enuncia que este es:

“...un método que combina la enseñanza presencial con la enseñanza virtual, emplea la tecnología y refleja la tendencia hacia un pensamiento ecléctico y más abierto, que trata de superar prejuicios y busca lo mejor de los dos tipos de enseñanza que hasta ahora estaban aparentemente contrapuestos. Aprendizaje mezclado implica determinar qué parte de un curso debe ser presencial y qué parte virtual, qué parte puede ser de autoaprendizaje y qué parte tutorada, qué parte sincrónica y qué parte asincrónica, qué papel debe jugar el facilitador presencial y el tutor virtual; estudio de casos, simulaciones, ejercicios y tutoriales, dónde se desarrollan actividades individuales y actividades en grupo, dónde se sitúan foros de discusión que reco-pilen conocimiento, pero que también los generen...”(pág. 72). [11].

En concordancia con lo anterior, esta visión deja ver que los ambientes *blended learning* sirven como recurso didáctico y pedagógico en los procesos de enseñanza-aprendizaje, el cual implica una mayor planeación y organización por parte del docente tal como lo plantea el mismo autor al tener que buscar respuestas a algunos interrogantes esbozando los siguientes: “¿Cómo organizar este conocimiento? ¿Cómo diseñar las comunidades de aprendizaje o de práctica? ¿Qué tecnologías y recursos podemos emplear?”. Poniendo todos los recursos disponibles en función de la pedagogía a través de la construcción de un ambiente educativo, definiendo roles y estableciendo responsabilidades dentro y fuera del aula de clases.

Por lo tanto, las teorías relacionadas con el *blended learning* que más influyen y sobre las cuales recae en gran parte el sustento teórico del *aprendizaje combinado* están las siguientes: según (Vera, 2008) citado por [7].

El conductismo se evidencia en el desarrollo de actividades por medio de tutoriales con la constante retroalimentación del docente; el constructivismo, es reflejado cuando el estudiante construye su propio conocimiento a través del trabajo cooperativo, investiga temáticas específicas y prácticas de indagación; el cognitivismo, se percibe como las habilidades, tácticas y destrezas para adquirir conocimiento encaminándolo hacia la investigación de *fenómenos circundantes*; *el humanismo*, es descrito cuando existen estímulos por parte de los tutores en los grupos virtuales, la reflexión del grupo en formación en las clases presenciales teniendo en cuenta el ritmo y los estilos de aprendizaje.

De acuerdo a lo anterior, el aprendizaje mezclado se puede diseñar de acuerdo al modelo pedagógico que desee; aunque existen cinco modelos pedagógicos bien diferenciados para el diseño de estos ambientes, desde el punto de vista de Flórez (1995) citado por Fonseca[6] dichos modelos son:

El modelo tradicional o academicista, tiene como base la disciplina que trae consigo la educación clásica; el buen ejemplo y su imitación, siendo el docente el abanderado de esta causa la cual es impartido por la transmisión verbal, los estudiantes son únicamente receptores del conocimiento; *el modelo conductista o de procesos tecnológicos* el cual consiste en el estímulo respuesta, donde se dan instrucciones claras y precisas las cuales son previamente analizadas por expertos y dadas a conocer por el docente a través de guías, de forma escrita o un software diseñado para ello; *modelo romántico o de autorrealización*, el cual brinda lo que el estudiante requiera, no existen contenidos establecidos; *el modelo desarrollista o cognitivo*, permite que el educando gradualmente llegue al conocimiento a través de la construcción de su propio conocimiento de acuerdo a sus motivaciones, condiciones y pre saberes donde el docente debe propiciar espacios que lleven al estudiante a llegar al siguiente nivel cognitivo; modelo de socialista o reconstrucción social; donde la sociedad juega un papel importante dando relevancia al trabajo y a la educación con el fin de superar las desigualdades sociales exigiendo a los

docentes y estudiantes al abandono de sus ideales personales asumiendo un compromiso político y social.

Necesariamente se debe adoptar un modelo que sustente pedagógicamente el ambiente *blended Learning*[6]; cabe resaltar que dichos modelos dependen de las motivaciones e intenciones del docente para con él donde es importante mencionar que dichos ambientes generan proyectos institucionales integrados que permiten sustentar las clases presenciales enriqueciendo el proceso de enseñanza – aprendizaje, permitiendo la flexibilización de las clases para los docentes y estudiantes, convirtiéndose en un poderoso instrumento generador de aprendizaje significativo.

El pensamiento y lenguaje variacional

El pensamiento variacional es definido por Vasco [20] como una manera de *pensar dinámica* donde existe un proceso mental interno dividido en cinco momentos; el primero de ellos, donde existe un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los modelos que se repiten en determinados procesos, un segundo momento de producción de sistemas mentales llamados *modelos mentales*, un tercer momento donde dichos modelos se ejecutan y arrojan unos resultados, el cuarto momento donde se comparan los resultados con lo que está sucediendo con el proceso que se pretende modelar y el último momento donde se revisa y se modifica si es necesario; o se decide, si se comienza de nuevo, este mismo autor señala que cuando se plantean *sistemas simbólicos* también se genera ese momento de *formulación simbólica* de ese modelo mental.

Ecuación lineal

Serrano [17], en su artículo titulado Etimología de algunos términos matemáticos presentó el término ecuación el cual es procedente del latín, derivado de *aequus*, igual). Es una igualdad en la que hay incógnitas, en una segunda definición la relaciona como igualdad, ecuación, equidistante, equilibrio (del latín *aequalis*, igual y libra, balanza), equinoccio (época en la que los días son de igual duración que las noches), lateral (perteneciente o situado al lado de una cosa), lo anterior lleva a pensar desde el punto de vista del origen de la palabra que se debe llevar a un equilibrio una problemática planteada, por tanto; aplicando la definición etimológica en un contexto real las ecuaciones están relacionadas con la solución proporcionada justa y por igual de una situación.

Concepto de variable

Se relaciona el término “*variable*” con palabras como símbolo, parámetro, argumento, espacio vacío, entre otras, toda vez, que considera que el término tiene varios significados dependiendo del contexto en el que aparece; así mismo, también señalan que la “*variable*” juega un papel importante dependiendo su contexto, siendo esta fundamental para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

Teniendo en cuenta que la “*variable*” generalmente se designa con letras, siendo fundamentales en la transición de la aritmética al álgebra, a continuación, se presenta algunos autores que han profundizado en el significado de la letra.

Historia de la X

El origen de la *x* cómo incógnita es un misterio, existen varias teorías todas ellas sin fundamento histórico, convirtiendo su origen en una incógnita como una de sus tantas representaciones actuales; puesto que la *x* no solamente representa un misterio, o un valor desconocido en matemáticas, también en algunas situaciones cotidianas, siempre se ha asociado a lo desconocido, a la incógnita, encerrando en sí misma un halo enigmático que atrae a todo aquel “... que ha superado la matemática fosilizada de los textos escolares y ha empezado a vivirla en toda su dimensión histórica” [20]

Problemas de aplicación de la ecuación lineal

Desde la didáctica de las ciencias se ha establecido la diferencia entre un ejercicio y un problema (Gil y Martínez-Torregrosa, 1983; Gil y colaboradores, 2002) citados por Sanjosé, Valenzuela, Fortes & Solaz-Portolés [16]: donde en el primero el sujeto conoce desde el inicio la forma de resolverlo y para el segundo no. Desde esta perspectiva se puede decir que los estudiantes del grado octavo de la I.E.D. Jorge Soto del Corral cuando se les plantea ecuaciones de primer grado se enfrentan ante un problema porque en su mayoría no saben desde el principio como llegar a su solución.

Para el caso de la comprensión de un problema según lo planteado por (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007a; Nathan, Kintsch y Young, 1992; Ferguson-Hessler y de Jong, 1990) citados por Sanjosé, Valenzuela, Fortes & Solaz-Portolés [16]. la comprensión de su enunciado involucra una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimientos previos específicos, conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático.

Los problemas verbales

Cabe señalar que los problemas verbales son relevantes en el currículo de matemáticas, según Jiménez & Verschaffel [10] los problemas verbales se empiezan a trabajar en primaria después de que el estudiante ha adquirido destrezas numéricas, reglas, principios y operaciones, en otras palabras la *sintáctica de la matemática*, la cual lleva a que el estudiante comprenda el enunciado del problema y razone al respecto de esa sintáctica y su aplicación en la situación descrita en el problema, por tanto el educando empieza a adquirir un manejo de la semántica de las matemáticas.

Sistema de representación en matemáticas

“Las representaciones en matemáticas son representaciones semióticas, constituidas por el empleo de signos, distintos, pero ligadas a las mentales: el desarrollo de las representaciones mentales no puede separarse de una interiorización de las semióticas.” Duval (1993b), citado por Fernández [5], el cual expresa que esta noción, se puede comprender que las representaciones en matemáticas están conformadas por signos, símbolos, letras, entre otros que el sujeto tiene interiorizada desde la semiótica; sin embargo, en la praxis de las distintas ramas de la matemática, cada una tiene sus propias leyes, reglas y excepciones, condición que el sujeto debe diferenciar de acuerdo con el contexto.

Así mismo, es importante señalar la importancia de las representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas a saber, la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984). Citado por Palarea[14].

Sistemas de representación

Un sistema de representación es el medio por el cual el sujeto exterioriza la comprensión que tiene de un fenómeno y/o problema, Fernández [5] identifico en su trabajo de investigación cinco sistemas de representación denominados sistema de representación *ensayo – error, parte todo, grafico, simbólico y grafico simbólico*.

Para explicar los sistemas de representación plantados por este autor, a continuación, se describe cada uno de ellos así:

Sistema de representación Ensayo–Error

Este sistema de representación utiliza notaciones numéricas y simbología aritmética donde el sujeto establece relaciones entre los datos conocidos y desconocidos a través del desarrollo de diferentes pruebas hasta lograr el resultado correcto.

Sistema de representación Parte-Todo.

Este sistema también es considerado como un sistema de representación numérico y es planteado a partir de estrategias que relacionan datos, se representa a través de la totalidad de lo que se quiere representar para luego segmentarlo dependiendo de la proporcionalidad de las partes que pide el problema.

Sistema de representación Gráfico

Este sistema se caracteriza por ser visual, donde los datos son representados a través de signos, símbolos, dibujos o gráficos que pueden ser físicos, geométricos o diagramáticos, e icónicos “*imágenes*” utilizando generalmente un esquema de parte-todo o una relación de proporcionalidad “*regla de tres*”.

Puesto así, es un *código gráfico* el cual es creado con el fin de establecer una relación entre los datos del problema y su incógnita sin utilizar ningún elemento simbólico, es decir, la gráfica o gráficas deben generar una deducción que lleve a la solución del problema. De acuerdo a lo anterior, se puede deducir que existe una *representación simbólica* expresada por las operaciones numéricas; pero éstas, no son una regla o norma; por tanto, se utiliza un gráfico particular que cambia para cada problema, en algunos casos facilita al estudiante deducir más fácilmente la respuesta.

Sistema de representación Gráfico–Simbólico

Este sistema es la combinación de la representación gráfica y simbólica, donde el sujeto mediante dibujos, gráficos o imágenes plasma sus interpretaciones, pero también se apoya de un lenguaje simbólico identificando los elementos que intervienen en dichas relaciones.

Este sistema de representación es una combinación que implanta relaciones entre el sistema gráfico descrito anteriormente apoyado de un lenguaje simbólico donde se plasman los datos y la incógnita.

Sistema de representación Simbólico

Corresponde a un nivel de mayor complejidad para su comprensión; siendo este el resultado esperado por los docentes de sus estudiantes en las prácticas escolares, atribuyéndole a este sistema un mayor valor, toda vez que en este sistema se representan los datos mediante lenguaje abstracto.

Para conocer más a fondo la forma correcta de plantear y desarrollar una ecuación a través de un problema verbal por cada uno de los sistemas de representación descritos anteriormente, puede ser observado en el numeral 4.2.2 donde se encuentra el apartado *etapa explicativa* donde se plantea un problema verbal el cual es desarrollado utilizando todos los sistemas de representación mencionados anteriormente paso a paso.

METODOLOGÍA.

Para esta investigación se utilizó un diseño de tipo cualitativo, destacando la fortaleza de este en procura de conocer la naturaleza y profundidad de las realidades, buscando conocer la dinámica, comportamientos y manifestaciones de los objetos de estudio. Resaltando a la vez, el que una investigación de tipo cualitativo integra todos los factores, y no se opone a lo cuantitativo que se puede considerar como una parte del todo, sino por el contrario lo completa e implica en donde sea perentorio [12].

En donde considerando que los sistemas de representación en matemáticas implican exteriorizar el pensar de manera ordenada y así dar a entender un conocimiento en matemáticas, expresado por medio de la semiótica, la comprensión va ligada a la utilización de varios sistemas de representación; lo anterior, refleja la importancia y el grado de complejidad de los mismos, siendo susceptibles a investigar "cuando el objeto que se quiere indagar está difuso, es complejo, escurridizo o controvertido.

Por lo tanto, pretendiendo ampliar el conocimiento en este campo de estudio el cual genera interés por su aplicabilidad en matemáticas y en este caso al álgebra escolar y en procura de conocer si el diseño de una propuesta de enseñanza para el planteamiento de problemas con ecuaciones lineales mediadas por un ambiente virtual de aprendizaje blended learning favorece el uso de diferentes representaciones, en estudiantes de grado octavo de la I.E.D Jorge Soto del Corral. Se escogió un estudio de caso colectivo enmarcado en un paradigma interpretativo en donde:

"Esta metodología se fundamenta en un enfoque holístico-inductivo-ideográfico, es decir, estudia la realidad en su globalidad, sin fragmentarla y contextualizándola; las categorías, explicaciones e interpretaciones se elaboran partiendo de los datos y no de las teorías previas, y se centra en las peculiaridades de los sujetos más que en el logro de leyes generales." [1]

Por lo tanto, se considera que las representaciones instauran una importante línea de investigación, la cual se encuentra en sus inicios; toda vez, por ser incipiente, se pueden realizar aportes de enorme relevancia para el campo de las matemáticas y en especial del álgebra escolar.

De acuerdo a lo anterior, la selección del estudio de caso se dio también con el fin de observar de manera sistemática el desempeño de los estudiantes frente al planteamiento y solución de problemas verbales, el tipo de representación que utilizaron antes y después de recibir la explicación de cada una de ellas; así mismo, se busca identificar el sistema de representación que más se le facilita a cada participante y las nuevas categorías o signos emergentes durante el proceso de investigación.

También es importante destacar que este tipo de investigación permitió observar *in situ* el fenómeno, el cual implica un proceso de observación sistemática, profunda y desde distintas perspectivas; a fin de obtener un conocimiento más amplio sobre el objeto de estudio, posibilitando la identificación de nuevos signos o categorías emergentes, toda vez que se puede observar un caso concreto desde una perspectiva integral; de otro lado este tipo de investigación permite un acercamiento al fenómeno y comprensión a partir del análisis de los datos obtenidos.

Finalmente, otra de las perspectivas a observar fueron los hechos del caso concreto, es decir, cómo construyen y plantean las ecuaciones desde su realidad, su comportamiento individual y social frente al uso de una estrategia diseñada en la modalidad Blended Learning que involucró el uso de estrategias convencionales como son los ejercicios de lápiz y papel apoyados por un ambiente virtual que dinamiza el uso de la representación mental. La edad del estudiante es acorde al uso guiado de esta modalidad virtual la cual despierta su interés; así mismo, la estrategia favorece el uso de las representaciones en los educandos y la influencia de ésta en el aprendizaje colaborativo.

Para el presente trabajo de investigación se desarrolló una estrategia blended learning en proporción 70% - 30% donde el 70% son las actividades guiadas por el docente (explicación de tablero, ejercicios en lápiz y papel, juegos didácticos) y el 30% (tareas y el simulador) la anterior proporción es acorde a la edad de los estudiantes participantes. Se utilizó un modelo de rotación por estación planteado por Staker & Horn[18] cabe aclarar que el ambiente virtual fue implementado en la plataforma Moodle; pertinente para esta investigación, puesto que pertenece al software libre, es de fácil aplicación y es cómodo a la hora de su implementación en las instituciones educativas; así mismo, el diseño de este ambiente se encuentra consignado en el anexo 5 el cual fue desarrollado bajo la metodología GRACE (gestión, requerimientos, arquitectura, construcción y evolución) toda vez que desde el punto de vista de Fonseca [6] es un método utilizado “para diseñar, construir e implementar software o aplicaciones informáticas”.

Etapas del proceso:

La investigación se realizó en seis etapas organizadas de la siguiente forma: una primera etapa llamada “diagnóstica” donde se efectuó una prueba de entrada con el grupo de ocho estudiantes participantes; con el objetivo de saber qué sistema de representación utilizaban intuitivamente en el planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado a través de problemas verbales, antes de saber de su existencia.

La segunda etapa nombrada “**explicativa**” consistió en la disquisición de cada uno de los cinco sistemas de representación (ensayo-error, parte todo, grafico, grafico-simbólico y simbólico) por medio de ejemplos claros, de problemas verbales escogidos pertinentemente para ser planteados y desarrollados en cada uno de los sistemas de representación.

La tercera etapa propuesta como “**aplicación y comprobación**” radicó en que los estudiantes desarrollaran los ejercicios propuestos en el sistema de representación que más se les facilitara, La cuarta etapa titulada “reconocimiento del ambiente virtual” se llevó a cabo en la sala de sistemas, donde los participantes recorrieron el ambiente virtual creado en Moodle y los servicios que ofrece éste; así mismo, el docente explicó cada una de las sesiones de la plataforma.

La quinta sesión llamada “**presentación del simulador**” se presentó el ambiente virtual a los estudiantes participantes, el cual fue implementado en la plataforma Moodle en *gnomio*; este sitio permite alojar gratuitamente la plataforma con las actividades virtuales propuestas; para tal fin, los estudiantes ingresaron a la dirección web *alvarrojo.gnomio.com*, el curso creado para tal fin se llama *ambiente blended learning – representación de ecuaciones* donde previamente se habían creado los siete usuarios invitados con sus respectivas claves.

Al ingresar al curso, se dio la bienvenida, con un avatar el cual invitó a los usuarios a iniciar las actividades desarrolladas; luego de ello, se visualizaron los objetivos y el contenido del ambiente para luego dar inicio a la **primera actividad**, llamada pre - saberes, en ese espacio los estudiantes contestaron un cuestionario de ocho problemas verbales de matemática elemental, donde se combinan operaciones básicas como la suma y la resta de números enteros; lo anterior, permite tener una línea base del desempeño de los estudiantes con respecto a sus aptitudes matemáticas.

Primera sesión

Esta se denominó como **historia de las ecuaciones**, consistió en observar la video historia *de las ecuaciones*, de una duración aproximada de siete minutos, donde se hizo un recorrido histórico desde su creación, hasta nuestros días; después de ello, los estudiantes deben participar en el foro de discusión, dando sus aportes y puntos de vista sobre el video observado.

Segunda sesión

Fue nombrada **introducción a los sistemas de representación**, estuvo diseñada para que los estudiantes participantes observaran cinco videos; cada video, contiene la explicación de cada uno de los cinco sistemas de representación con su respectivo ejemplo, cada uno con una duración aproximada de dos a tres minutos; después de ello, los estudiantes participantes discutieron en el foro sus puntos de vista en cuanto a la percepción que tuvieron frente al manejo e interacción de los sistemas de representación.

Tercera sesión

Se llamó **juegos de motivación**, en este espacio se agregó el siguiente enlace www.plastelina.net, allí se les indicó los juegos que tuvieron que jugar, a medida que los estudiantes finalizaron correctamente cada juego, se les pidió que escribieran en el foro de discusión creado para ello, el sistema de representación que utilizaron para resolverlo; así mismo, debieron escribir el paso a paso que siguieron para llevarlo a buen término y finalizarlo correctamente. Los siguientes juegos lógicos fueron los escogidos para esta actividad: *frogs logic* “juego lógico de las ranas”, *Cannibals & Missioneries* “juego lógico de los caníbales y los misioneros” y *Elevators Logic* “juego lógico de los ascensores”

La sexta y última sesión titulada “prueba de salida”

La actividad final que realizaron los estudiantes participantes en el ambiente virtual corresponde a la **cuarta sesión**, y la cual es referenciada como **simulador de los sistemas de representación**, consistió en la interacción de los educandos con el simulador diseñado y creado exclusivamente para esta sesión.

El simulador fue diseñado en *Adobe Edge Animate CC 2015*, software de *adobe* que está llamado a convertirse en el *flash* de la revolución *HTML 5*; lo anterior, con el fin de mencionar que es el software indicado para realizar las animaciones de cada uno de los sistemas de representación para ser vistos correctamente en cualquier página web ver figura 10.

El simulador se encuentra alojado en el siguiente enlace web: <http://tio-dave.com/problemas/> el cual fue añadido en el ambiente virtual en *Moodle*

Figura 1 . Interface gráfica de la presentación de los sistemas de representación del simulador

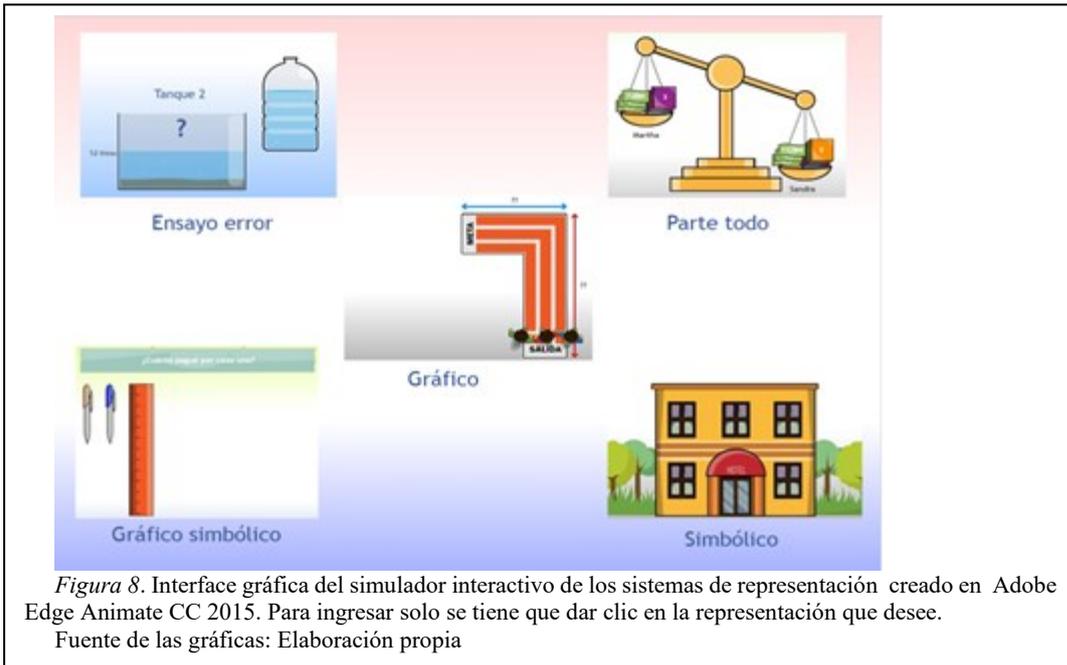


Figura 8. Interface gráfica del simulador interactivo de los sistemas de representación creado en Adobe Edge Animate CC 2015. Para ingresar solo se tiene que dar clic en la representación que desee.
Fuente de las gráficas: Elaboración propia

Este simulador fue creado exclusivamente con cinco ejercicios verbales donde el educando puede elegir el sistema de representación con el que quiere interactuar, *ensayo – error*, *parte – todo*, *gráfico*, *gráfico – simbólico* y *simbólico*, cada uno de ellos cuenta con el enunciado del problema verbal, los datos conocidos y desconocidos del problema; así mismo, las opciones múltiples para que el estudiante seleccione la que crea es la respuesta correcta, el botón de verificar; el cual, al darle clic ejecuta la animación, generando una tabla con el intento y el mensaje que indique si lo hizo correctamente o no colocando una x al intento fallido y un chulo al intento correcto; cabe señalar, que si el intento es incorrecto puede volverlo a probar.

En el caso de los demás sistemas de representación al dar clic en el botón verificar ejecuta la simulación, pero no genera la tabla como en el ensayo error, sino que enfrente de la opción que elija para ser verificada arroja la x si es incorrecto y el “chulo” si es correcta, (ver figura 11, 12, 13 , 14 y 15).

Figura 2. Interface gráfica del simulador ensayo – error

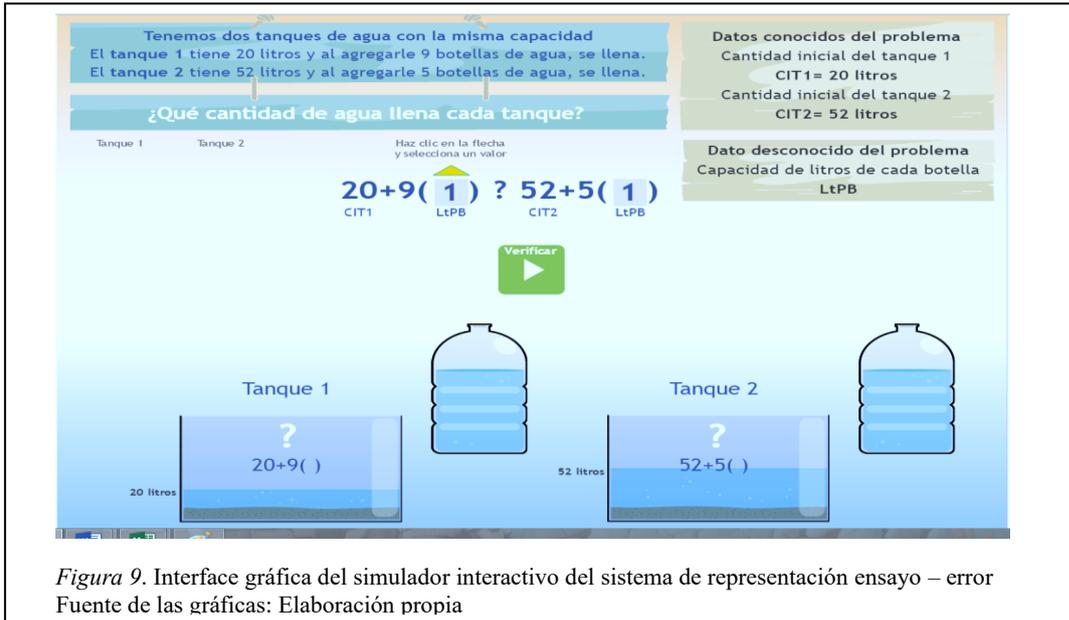


Figura 9. Interface gráfica del simulador interactivo del sistema de representación ensayo – error
Fuente de las gráficas: Elaboración propia

Figura 3. Interface gráfica del simulador parte todo

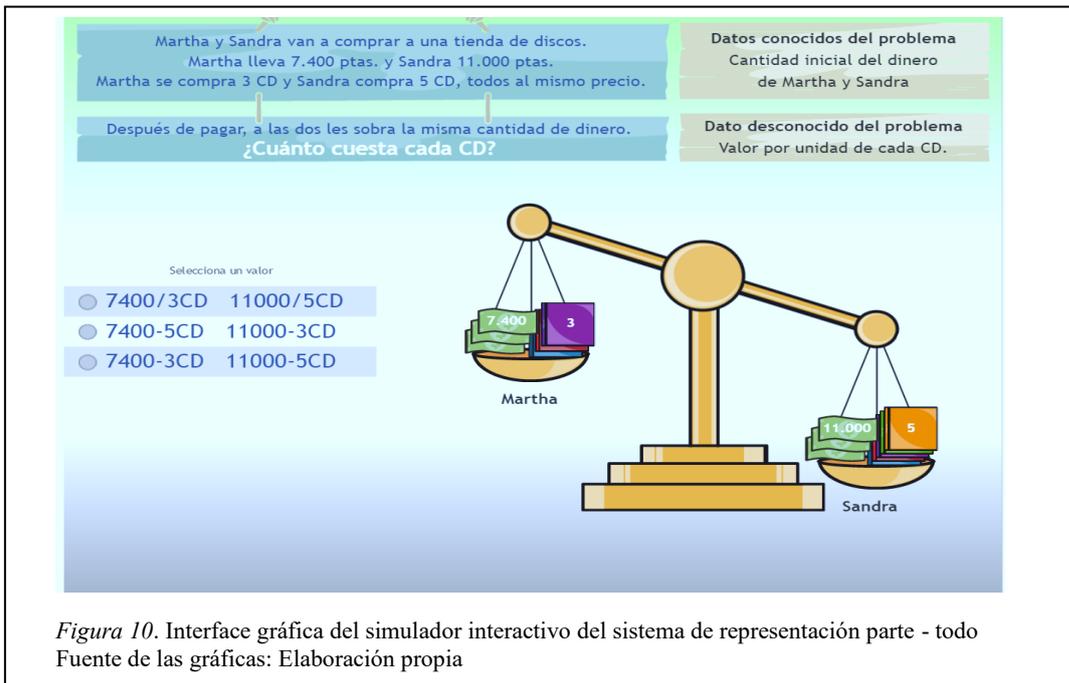


Figura 10. Interface gráfica del simulador interactivo del sistema de representación parte - todo
Fuente de las gráficas: Elaboración propia

Figura 4. Interface gráfica del simulador gráfico

Figura 5. Interface gráfica del simulador gráfico – simbólico

Martha y Sandra van a comprar a una tienda de discos.
Martha lleva 7.400 ptas. y Sandra 11.000 ptas.
Martha se compra 3 CD y Sandra compra 5 CD, todos al mismo precio.

Después de pagar, a las dos les sobra la misma cantidad de dinero.
¿Cuánto cuesta cada CD?

Datos conocidos del problema
Cantidad inicial del dinero de Martha y Sandra

Dato desconocido del problema
Valor por unidad de cada CD.

Selecciona un valor

- 7400/3CD 11000/5CD
- 7400-5CD 11000-3CD
- 7400-3CD 11000-5CD

Figura 10. Interface gráfica del simulador interactivo del sistema de representación parte - todo
Fuente de las gráficas: Elaboración propia

Figura 6. Interface gráfica del simulador simbólico

Daniela dice: por una regla y dos bolígrafos he pagado \$2400, la regla me ha costado \$450 más que el bolígrafo.

¿Cuánto pagué por cada uno?

Datos conocidos del problema
Valor total de los elementos = \$2400
Relación entre los precios = la regla cuesta \$450 más que el bolígrafo

Dato desconocido del problema
Costos de la regla y del bolígrafo

Simbólico	Gráfico	
$2x$		
$x + 450$		= \$2400
$3x+450$		= 2400
$3x+450-450$		= 2400-450
$3x/3$		= 1950/3

Figura 12. Interface gráfica del simulador interactivo del sistema de representación gráfico - simbólico

En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones, en el segundo piso hay el doble que en el primero.

Datos conocidos del problema
Cantidad de habitaciones = 48

Dato desconocido del problema
Cantidad de habitaciones en el piso 1

¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?

¿Con qué símbolo se puede asociar el número de habitaciones del primer piso? Bien!

¿Con qué símbolo se puede asociar el número de habitaciones del segundo piso? Bien!

¿Cual es la ecuación que representa la situación planteada?

- $x + x/2 = 48$
- $3x + x = 36$
- $x/2 + 2x = 48$
- $x + 2x = 48$

Figura 13. Interface gráfica del simulador interactivo del sistema de representación simbólico
Fuente de las gráficas: Elaboración propia b

Etapa prueba de salida

Para el desarrollo del instrumento; se asignó un tiempo de cuarenta minutos, dicha prueba fue realizada en el salón de grado octavo de la I.E.D Jorge Soto del Corral.

En esta última etapa se pretendió conocer el/los sistemas(s) de representación que los estudiantes utilizaban después de conocer e interactuar con ellos en el ambiente *blended learning*; para ello, se aplicó el mismo instrumento desarrollado en la prueba de entrada con el fin de comparar las pruebas antes y después del proceso.

RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los estudiantes participantes de grado octavo de la IED Jorge Soto del Corral, demostraban a través de pruebas estandarizadas la dificultad en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales de primer grado a través de problemas verbales; puesto que, en las prácticas escolares se evidenció que presentaron falencias en la comprensión lectora; y por ende, no identifican los datos conocidos y desconocidos, cometiendo errores puntuales en la modelación de la ecuación, aunque resolvieron la misma usando el sistema de representación simbólico, pero de forma mecánica; para esto, al implementar una propuesta que pretendía responder cuales debían ser las características de la misma, mediada por un ambiente en la modalidad *blended learning* que favoreciera el uso de diferentes sistemas de representación para el planteamiento y solución de diferentes problemas verbales, encontrándose en referencia a:

En el ambiente en la modalidad *blended learning*, el planteamiento de esta desarrollada en un porcentaje 70 % presencial y 30 % virtual, se logró identificar que este ambiente facilitó el seguimiento de las fases para la resolución de problemas planteado por Mayer (1983) citado por Fernández (1997), permitiendo ademar apoyarse en el

uso de simuladores, juegos y videos como un complemento adecuado para la resolución de problemas verbales; donde esta proporción, frente a el estadio de desarrollo de los estudiantes, siendo el de operaciones formales les permitió algún nivel de autonomía necesario para este aprendizaje. Donde se hace necesario el acompañamiento de los estudiantes por parte del docente en las fases de resolución del problema para que al ser reforzados a través de los ambientes virtuales se generen aprendizajes más significativos a través de los sentidos y el “hacer”.

Tabla 1. Uso de representaciones en el planteamiento y resolución de problemas

Representaciones más utilizadas en el planteamiento y resolución de problemas										
PLANTEAMIENTO %										
ENUNCIADOS	ENTRADA					SALIDA				
	RPE E	RPP T	RP G	RPG S	RP S	RPE E	RPP T	RP G	RPG S	RP S
Problema Tanque RPEE	37,5	0	0	0	0	100	0	0	0	
Problema El Viaje RPPT	0	62,5	0	0	0	0	75	0	0	25
Problema La Librería RPG	37,5	0	0	0	0	75	0	0	0	25
Problema Ebanistería RPGS	50	0	0	0	0	25	0	50	0	0

RESOLUCION %										
ENUNCIADOS	ENTRADA					SALIDA				
	RPE E	RPP T	RP G	RPG S	RP S	RPE E	RPP T	RP G	RPG S	RP S
Problema Tanque RPEE	75	0	0	0	0	100	0	0	0	0
Problema El Viaje RPPT	0	87,5	0	0	0	75	0	0	0	25
Problema La Librería RPG	32,5	0	0	0	0	75	0	0	0	25
Problema Ebanistería RPGS	75	0	0	0	0	25	0	50	0	25

	RPEE	Representación Ensayo Error
	RPPT	Representación Parte Todo
	RPG	Representación Gráfica
	RPGS	Representación Gráfico simbólico

Fuente: elaboración propia

Sobre el favorecimiento del uso de sistemas de representación en matemáticas por parte del estudiante; en esta investigación, se evidenció que el más utilizado tanto en la prueba de entrada y salida, es el sistema de representación ensayo error ver tabla 5, analizando que este sistema en particular es utilizado de forma intuitiva; al parecer, determinado por sus pre saberes; cabe señalar que se demostró en el desarrollo de esta

propuesta que los participantes aplican este sistema de representación de manera aleatoria y desordenada, sin seguir el orden lógico establecido para la resolución de cualquier problema verbal algebraico. Toda vez que en la investigación planteada por Fernández [5] fue uno de los sistemas más utilizado junto con el sistema de representación simbólico.

El segundo sistema más utilizado es el parte-todo, lo cual se referencia en la misma tabla; la cual, los estudiantes que han logrado pre saberes adecuados en aritmética básica se atreven a desarrollar algunos problemas usando este sistema de representación, abordándolos a través de operaciones inversas (suma y resta, multiplicación y división o viceversa) llegando un bajo porcentaje de los estudiantes a la solución correcta, puesto que existen falencias en la comprensión lectora del problema verbal y no en la ejecución de este sistema de representación.

Los sistemas de representación gráfico y grafico-simbólico no fueron utilizados por los estudiantes correctamente; infiriéndose a partir de lo anterior que ellos no están acostumbrados a usarlos, posiblemente debido a que no fueron incentivados a usarlos desde el comienzo de su formación en aritmética. Puesto de esta manera; para que este sistema de representación se aborde más fácilmente, los estudiantes deben tener buenas bases en geometría, puesto que muchos problemas son abordados desde varios conceptos geométricos como: perímetro, área, longitud y volumen entre otros.

Los investigadores apreciaron que en ese tipo de representaciones los participantes resolvieron mal los problemas verbales por sus falencias en esos pre saberes; lo cual evidencia la necesidad de suplir estas falencias debido a que el MEN recomienda trabajar desde la educación básica primaria, *la identificación la percepción y la caracterización de la variación y el cambio*, lo que debe ser evidenciando en varios contextos y aplicado en varios sistemas de representación como lo son el simbólico, el verbal y el grafico [13].

Con respecto al sistema de representación simbólico, el cual está fuertemente arraigado, puesto que es el sistema más utilizado para el proceso de enseñanza- aprendizaje del algebra en nuestro sistema escolar y el más difundido en libros de textos. Se hace necesario aportar que por su práctica constante en el ambiente escolar un bajo porcentaje de estudiantes cometen errores al aplicarlo y por ende fue tenido en cuenta en esta investigación como objeto de análisis, ya que la intención de la misma era el favorecimiento del uso de otros sistemas de representación.

En la resolución de problemas verbales a través del uso de ecuaciones lineales los participantes después de usar la estrategia se acercaron al concepto de ecuación lineal, mejorando el planteamiento de las mismas y la relación de los datos conocidos y desconocidos; en el uso de la igualdad reconocieron parcialmente el signo igual como un equilibrio, pero con dificultades en el uso de operaciones inversas, para hallar el valor que debe cumplir la incógnita.

3 Conclusiones

El diseño e implementación de un ambiente *blended learning*, favoreció la comprensión y el uso de los diferentes sistemas de representación planteados en estudiantes de grado octavo, debido a que les permitió fortalecer su capacidad de plantear y solucionar problemas verbales a través de su mejora en la comprensión y planteamiento de problemas.

El ambiente *blended learning*, permitió identificar diferentes alternativas al plantear y resolver problemas verbales por medio de ecuaciones de primer grado con una incógnita; mediante el desarrollo de ejercicios de *lápiz y papel* y reforzados con las diferentes herramientas del ambiente virtual; tales como, el simulador, videos y juegos.

El sistema de representación más utilizado por los estudiantes, fue el sistema de representación ensayo- error; puesto que este es el más arraigado e influenciado por los pre saberes en los estudiantes; respecto al uso de sistemas de representación en la enseñanza tradicional del álgebra escolar.

El ambiente virtual desarrollado en *Moodle*, conto con diversos elementos como los simuladores de los sistemas de representación; permitieron a los estudiantes de grado octavo tener un acercamiento a los sistemas de representación de forma interactiva favoreciendo la comprensión de los sistemas de representación planteados. Permitiendo en ellos un mejor análisis de los problemas propuestos por medio del ambiente *blended learning*; generando en ellos aprendizajes significativos.

Los instrumentos adaptados permitieron medir en los participantes, el como el uso de los diferentes sistemas de representación, facilitaban el conocimiento las ecuaciones lineales mediante la resolución de problemas verbales.

Los sistemas de representación están ligados al pre saber; si estos están correctamente fundamentados, se puede concluir que pueden fortalecer y mejorar los sistemas de representación en matemáticas

El desempeño que tiene los estudiantes en el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales a través de problemas verbales de los estudiantes está directamente relacionado con los pre saberes y la adecuada aplicación de los sistemas de representación.

El uso del simulador de los sistemas de representación planteados y creados exclusivamente para motivar e incentivar los sistemas de representación en los estudiantes, comprobó que este tipo interactivo de objetos virtuales favorecen la construcción mental de los diferentes sistemas de representación.

Referencias

- [1] Arnal, J., Del Rincón, D., & Latorre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodologías*. Barcelona: Labor.
- [2] Buckingham, D. (2008). *Mas allá de la tecnología: Aprendizaje infantil en la era de la cultura digital*. (L. C. Poliry Press, Ed., & E. Odriozola, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Ediciones Manantial 5RL. Recuperado el 2 de Mayo de 2016, de <https://tecnoeducativas.files.wordpress.com/2015/03/buckingham-mas-alla-de-la-tecnologia.pdf>
- [3] Bustos, A., & Coll, C. (Enero - Marzo de 2010). Los entornos virtuales como espacios de enseñanza y aprendizaje. Una perspectiva psicoeducativa para su caracterización y análisis. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(44), 163-184. Recuperado el 20 de Mayo de 2016, de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14012513009>
- [4] Duarte, J. (2003). Ambientes de aprendizaje una aproximación conceptual. *Estudios pedagógicos*(29), 97-113. Recuperado el 10 de Abril de 2016, de <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052003000100007>

- [5] Fernandez, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Granada, España: Universidad de Granada, Tesis Doctoral. Obtenido de <http://goo.gl/vg9bXI>
- [6] Fonseca, O. (2015). *Creación de ambientes blended learning- Empleando estilos de enseñanzay el diseño instruccional*. Bogotá: autores editores. Recuperado el 2016 de 01 de Noviembre
- [7] González, K., Padilla, J., & Rincón, D. (2011). Teorías relacionadas con el B - Learning y el papel del docente. *Revista Educación y Desarrollo Social*, 5(2), 98 - 111. Recuperado el 13 de 07 de 2016, de http://www.umng.edu.co/documents/63968/70434/ekb_articulo7.pdf
- [8] Gros, B. (Mayo - Agosto de 2002). Constructivismo y diseños de entornos virtuales de aprendizaje. *Revista de Educación*(328), 225 - 247. Recuperado el 25 de Mayo de 2016, de <http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre228/re3281310861.pdf?documentId=0901e72b8125940d>
- [9] Gros, S. & Silva (25 de Mayo de 2005). La formación del profesorado como docente en los espacios virtuales de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*(36). Recuperado el 1 de Junio de 2016, de http://rieoei.org/tec_edu32.htm
- [10] Jiménez, L., & Verschaffel, L. (2014). El desarrollo de las soluciones infantiles en la resolución de problemas aritméticos no estándar. *Revista de Psicodidáctica*, 19(1), 93 - 123. Recuperado el 3 de octubre de 2016, de <http://www.ehu.eus/ojs/index.php/psicodidactica/article/viewFile/7865/9947>
- [11] Martí, J. (2009). Aprendizaje mezclado (B-Learning) Modalidad de formación de profesionales. *Revista Universidad EAFIT*, 45(154), 70 - 77. Recuperado el 2 de Julio de 2016, de <http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/article/viewFile/68/67>
- [12] Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista I/PSI*, 9(1), 123 - 146. Recuperado el 30 de 10 de 2016, de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf
- [13] MEN. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático*. Bogotá: Cargraphics S.A.
- [14] Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tenerife, San Cristobal de la Laguna, España: Departamento de análisis matemático Universidad de la Laguna. Obtenido de <ftp://tesis.bbt.ull.es/ccppytec/cp90.pdf>
- [15] Prensky, M. (Octubre de 2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon*, 9(5). Recuperado el 5 de 6 de 2016, de <http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf>
- [16] Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M., & Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 6(3), 538-561. Obtenido de http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen6/ART4_Vol6_N3.pdf
- [17] Serrano, E. (2000). Etimología de algunos términos matemáticos. *Revista SUMA*(35), 87-96. Recuperado el 18 de abril de 2016, de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/35/087-096.pdf>

- [18] Staker, H., & Horn, M. (2012). *Classifying K–12 Blended Learning*. Innosight Institute. Recuperado el 2 de Noviembre de 2016, de <http://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/04/Classifying-K-12-blended-learning.pdf>
- [19] Suárez, J. (Marzo de 2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista Números*, 76, 83-103. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf
- [20] Vasco, C. (1983). *El algebra renacentista*. Bogotá: Departamento de matemáticas y estadística Universidad nacional de Colombia.
- [21] Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 1 - 14. Recuperado el 28 de Junio de 2016, de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf