

Recursos educativos digitales para el desarrollo de habilidades de visualización espacial

Jorge Hernán Aristizábal Zapata, Universidad del Quindío, Docente investigador, Armenia (Q), Colombia, jhaz@uniquindio.edu.co

Cesar Augusto Acosta Minoli, , Universidad del Quindío, Docente investigador, Armenia (Q), Colombia, cminoli@uniquindio.edu.co

Efraín Alberto Hoyos Salcedo, Universidad del Quindío, Docente investigador, Armenia (Q), Colombia, Eahoyos@uniquindio.edu.co

Resumen

El propósito de esta investigación, es evaluar el impacto que tiene la incorporación de recursos y contenidos educativos digitales mediante una estrategia de intervención pedagógica en el desarrollo de habilidades de visualización espacial en estudiantes de la asignatura de cálculo vectorial de la Universidad del Quindío. El tipo de investigación fue de tipo cuasi experimental y el enfoque metodológico adoptado que se publica es el cualitativo de tipo descriptivo, puesto que permite realizar una observación directa y permanente a las respuestas de las actividades propuestas para observar las experiencias de los 102 estudiantes de 5 programas académicos frente a este tipo de recursos, y así describir las diferentes estrategias que utilizan para resolver los problemas de visualización del espacio 3d, esta investigación es financiada por El Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia (Colciencias).

Palabras clave:. Geometría analítica 3D, software educativo, superficies cuádricas, geometría analítica 3D.

Introducción

Estamos inmersos en un mundo tridimensional pero muchos de los cálculos se realizan sobre superficies en dos dimensiones, más aún, se necesita para la resolución de varios problemas la visualización definida como “el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado” (Cantoral & Montiel, 2003). Para resolver un problema, los estudiantes en ocasiones necesitan calcular medidas utilizando integrales, por ejemplo, al calcular el volumen entre varias superficies, se encuentran con algunas dificultades que

no son la resolución de la integral, si no el planteamiento de la misma, para lo cual necesitan de la visualización de los objetos en tres dimensiones, lo que permite determinar los límites para realizar dicha integral. Para sortear este obstáculo se propone la presente investigación financiada por Colciencias y cuyo objetivo es evaluar el impacto que tiene la incorporación de recursos y contenidos educativos digitales mediante una estrategia de intervención pedagógica en el desarrollo de habilidades de visualización espacial en estudiantes de la asignatura de cálculo vectorial de la Universidad del Quindío, la experiencia incorpora el uso del software educativo “GAnalíticaB3D”, , la formación de profesores y de estudiantes en este tema, desde un enfoque donde se pone en relevancia los procesos de visualización de las superficies en el espacio 3D, buscando precisar las gráficas de las superficies a partir de su ecuación y en forma inversa, encontrar la ecuación a partir de la visualización de la gráfica correspondiente, lo que plantea (Krutetskii 1976, p315) como pensamiento de tipo armónico.

Referentes teórico-prácticos básicos.

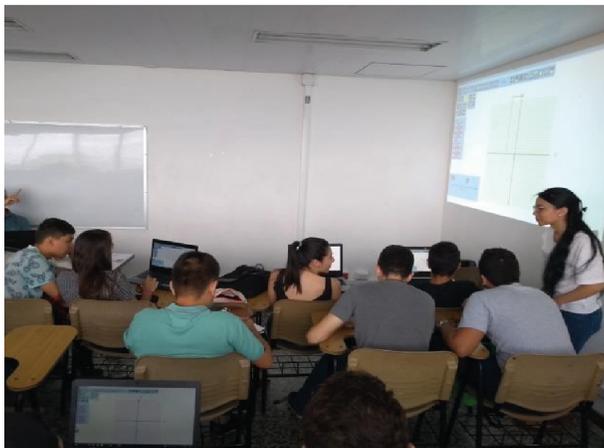
La construcción de la propuesta está fundamentada desde el mejoramiento de las habilidades de visualización y el uso de un recurso educativo digital, para lo cual se tomaron como referentes a Gonzato, M., Blanco, T., y Godino, J. (2011) los cuales plantean unas tareas para desarrollar las habilidades de visualización de objetos tridimensionales como: reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensional (perspectivas, vistas), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones plana, dichas tarea ayudaron a plantear las tareas para desarrollar las habilidades de visualización en 3D, por otro lado tenemos a Cerón, M. Hoyos, E. y Aristizábal, J. (2012). Quienes plantean que el mejoramiento del manejo de la perspectiva producido por el uso del software educativo y el producido por el uso de recursos didácticos concretos es significativamente diferente, hecho que da sustento al uso del software educativo “GAnalíticaB3D” debido a los elementos y superficies que se pueden visualizar mejor en un software que en un papel simulando el efecto tridimensional en un dibujo bidimensional, postura que reafirma Mota, J. & Laudares (2013) aluciendo que con el software fue posible analizar las figuras sobre las ecuaciones. Observar los mínimos detalles posibles de las figuras en el espacio, por otro lado, para plantear las diferentes actividades, se tuvo en cuenta los niveles de demanda cognitiva Smith, M. y Stein, M. (1998) quienes plantean el nivel de dificultad que requiere un estudiante para resolver una actividad de manera exitosa.

Metodología.

Para el desarrollo de la investigación se realizó un análisis preliminar pasando por las etapas de validación del recurso educativo digital, construcción de la estrategia, selección de los grupos y observación durante el proceso investigativo, a continuación, se describen cada una de las etapas.

1. Validación del recurso educativo digital. Se realizó el software educativo al interior del grupo Gedes de la Universidad del Quindío con nombre GAnalíticaB3D, en la primera etapa se realizó una validación con estudiantes del curso matemáticas 3 y con docentes que han impartido dicha asignatura, esto con el fin de determinar los aspectos a mejorar en el software en la parte de diseño y la forma en que se presentaban los contenidos polémicos generándose varias versiones del software.
2. Construcción de la estrategia. Entre las técnicas cualitativas se tuvo en cuenta la observación participante (Kawulich, B. 2005), la entrevista semi-estructurada (Tonon, G. 2009). y el análisis de una prueba a priori y a posteriori. Se realizó la estrategia de intervención a través de secuencias didácticas en la que se incluía el uso del software (imagen No. 1) y el empleo de actividades de la cartilla, la entrevista semi-estructurada y los aspectos observables en el desarrollo de las sesiones con los estudiantes de tal suerte que fueran acordes con los objetivos planteados. La observación se realizó en tres momentos: durante la explicación del software, la aplicación de la prueba a priori y el desarrollo de la actividad evaluativa con el uso del software, las anteriores etapas fueron revisadas y ajustadas por 6 Docentes con formación a fin al objeto matemático investigado; tres doctores, uno didáctica de las matemáticas, otro en matemáticas y el último en ingeniería, Dos estudiantes de doctorado uno en ciencias de la educación y el otro en ingeniería, dos magister, uno Ciencias de la educación y, matemática;, esto con el fin de dar validez a los instrumentos utilizados.

Imagen No. 1. Aplicación de la secuencia.



Fuente Propia

3. Selección de los grupos. Inicialmente se seleccionaron los programas académicos de Química, Licenciatura en matemáticas, Ingenierías de sistemas y de alimentos en sus dos jornadas diurna y nocturna e ingeniería civil, al implementar la estrategia, en la etapa de revisión y ajuste, se tomaron 5 grupos, en los cuales se imparte la asignatura cálculo vectorial (Ingeniería Civil, Ingeniería de sistemas Diurno, Ingeniería de sistemas nocturno, Ingeniería de alimentos Nocturno y Licenciatura en matemáticas) en la universidad del Quindío, de cada participante se contó con el consentimiento informado, respetando en todo momento los estudiantes que no

querían participar en alguna etapa de la investigación y salvaguardando la identidad, obteniendo una población final como se muestra en la tabla 1.

Tabla No.1 Programas académicos y estudiantes participantes.

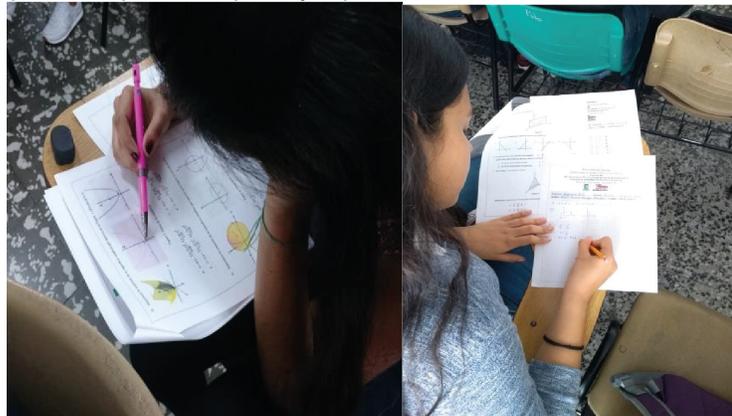
Programas académicos Universidad del Quindío	Total de estudiantes en cada asignatura	Número de estudiantes participantes
Ingeniería Civil	31	20
Ingeniería Sistemas D	39	36
Ingeniería Sistemas N	33	23
Ingeniería Alimentos N	16	14
Licenciatura en matemáticas	13	9
Total	131	102

Fuente Propia.

4. Observación durante el proceso investigativo. La observación se realizó en tres momentos: durante la explicación del software, la aplicación de una prueba a priori y el desarrollo de una actividad evaluativa con el uso del software, adicional a esto se realizó una entrevista, para la cual, se tomaron estudiantes a azar de los programas participantes, sobre decir que todos ellos accedieron a ser entrevistados de forma libre, sin presiones y plasmándose literalmente todas las declaraciones. La entrevista semi-estructurada se realizó finalizado la aplicación de una prueba a posteriori.

El análisis de dos pruebas equivalentes a priori y a posteriori (imagen No. 2) giraron en torno a ciertas habilidades como: componer una superficie a partir de cortes con un plano o trazas, a partir de una superficie o su ecuación y un plano que la intercepta identificar las curvas resultantes, a partir de la ecuación dada, identificar la superficie correspondiente, dada una superficie, identificar su ecuación correspondiente y ubicación espacial, estas habilidades están relacionadas con los objetivos de la entrevista para realizar la triangulación.

Imagen No. 2. Aplicación prueba a priori y a posteriori.



Fuente Propia.

Las preguntas de la entrevista se estructuraron a la luz de ciertos objetivos como lo son: permitir diferenciar si los estudiantes prefieren usar razonamiento analítico o visual (Krutetskii, Teller, Kilpatrick, & Wirszup, 1977), detectar el uso de imágenes mentales (Hitt, 1998), determinar el impacto y la potencialidad del software implementado para los procesos de visualización.

Descripción general de la experiencia en aula.

La metodología utiliza un ambiente computarizado empleando el software educativo “GAnalíticaB3D” (imagen No. 1) complementado con una cartilla en formato digital que contempla los aspectos algebraicos que permiten relacionar las diferentes representaciones de los respectivos objetos geométricos 3D.

Utilizando este software, el estudiante debe realizar 25 tareas diferentes las cuales son propuestas y evaluadas automáticamente por el software educativo. Estas tareas abordan temas como: Puntos en 3D, Planos en 3D, Cilindros, Elipsoide, Paraboloide elíptico, Paraboloide hiperbólico, Hiperboloide de una hoja, Hiperboloide de dos hojas y Cono.

Cada tarea se centra en identificar y ubicar las figuras geométricas a partir de su ecuación canónica y viceversa, es decir que a partir de la gráfica presentada por el software, el estudiante pueda inferir los parámetros de la ecuación correspondiente. Es de anotar que las tareas tienen diferentes niveles de demanda cognitiva (Benedicto, 2013), además, es fundamental que el estudiante realice las tareas planteadas en la cartilla complementaria al software educativo para potenciar las habilidades de visualización de los objetos de la geometría analítica en el espacio 3D.

El sistema de evaluación de la experiencia de aula considera la realización de cada una de las actividades, las cuales tiene un peso relativo a su demanda cognitiva. Esto significa que el estudiante escoge las actividades propuestas por el software y responde a cada una de ellas teniendo en cuenta que las preguntas más difíciles tienen el mayor peso y que el trabajo de ejercitación debe realizarse abarcando todos los temas que presenta el software educativo.

Descripción del trabajo de campo con las técnicas empleadas

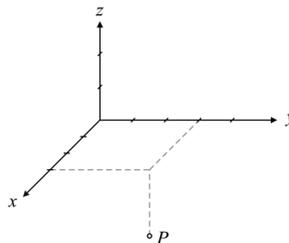
La observación participante. Durante la explicación del software los estudiantes en general se mostraron muy interesados y manifestaban expresiones de sorpresa y manifestaban “Uff Qué bacáno que se ve esas graficas” (IngSisDDaCa)¹ y (IngAliNMaMe), “Tan chévere que se mueven esas graficas” y (IngAliNLUOs), “Todas esas construcciones que se pueden hacer con base en esas superficies” (IngCivDOmPi) lo que permite evidenciar que para los estudiantes es algo novedoso y motivante (IngCivDFeMa) “concuera perfecto con la temática de clase” (IngCivDKeRu) “fue entretenido todo, además de proporcionar unos buenos ejercicios para la visualización en 3D”. Lo anterior deja en evidencia la pertinencia de incorporar este tipo de propuesta a la clase de cálculo vectorial.

¹ El paréntesis es para identificar los datos de los estudiantes y sus respuestas

Aplicación de la prueba a priori. En la aplicación de la prueba a priori se evidenciaron aspectos generales en los grupos en donde se realizó la observación, por ejemplo, en la pregunta No.1, (imagen No. 3). Algunos alumnos contaron los puntos de los ejes para hacer el rastro de un punto (x, y, z) , otros estudiantes midió con regla la parte positiva del eje z para comparar cuanto baja en z , lo anterior deja en evidencia que los estudiantes se les dificulta ubicar un punto en el espacio y hacen uso de conocimientos previos para tratar de ubicarlos, como cuando ubican un punto en el plano cartesiano. Esta pregunta aunque parece evidente es muy importante porque es la base para ubicar curvas, plano y superficies como lo manifiesta (López, Alanís, & Pérez, 2005) Es importante que el estudiante desarrolle la habilidad de ubicación de un punto en el sistema tridimensional, la cual es requerida en la solución de problemas matemáticos a nivel superior además de ser esencial saber la dirección de una partícula, teniendo un punto de referencia si está a la derecha-izquierda, frente-atrás o arriba abajo en un plano coordenado o un objeto geométrico.

Imagen No.3 Primera pregunta de la prueba a priori.

1. Dado el sistema de coordenadas cartesianas en tres dimensiones:



Marque la opción que corresponde a la coordenada correcta del punto P .

- | | |
|----------------|-----------------|
| a. $P(3,3,2)$ | c. $P(3,3,-3)$ |
| b. $P(3,3,-2)$ | d. $P(-3,3,-2)$ |

Fuente Propia.

La entrevista semi-estructurada. El entrevistador realiza preguntas a los estudiantes participantes en el proceso investigativo a lo cual, sus respuestas son agrupadas por su similitud y otras están implícitas en algunas de las respuestas plasmadas.

Referente a la pregunta 1. para esta pregunta se tomaron dos estudiantes de diferentes programas los cuales recogían las respuestas procedimentales similares.

(Entrevistador): Explique qué procedimiento utiliza para ubicar un punto en el espacio 3d.

(IngAliNMaMe) “primero que todo identificar los ejes”

(Entrevistador) “a que se refiere a identificarlos”

(IngAliNMaMe) “El orden, es decir x, y, z ” para mirar la coordenada

(Entrevistador) “osea ¿qué este orden podría cambiar?”

(IngAliNMaMe) “si, pues podría estar el eje y arriba o el x a un lado”

(Entrevistador) “Muy bien, y entonces”

(IngAliNMaMe) “ya identificados los ejes paso a ubicarlos según los ejes, las cantidades de las coordenadas en cada una según la escala”.

(IngSisDYeCa) “buscó los ejes x y ubicó, luego me muevo en y , y corro a izquierda o derecha y por último subo o bajo cuantas veces me diga z”

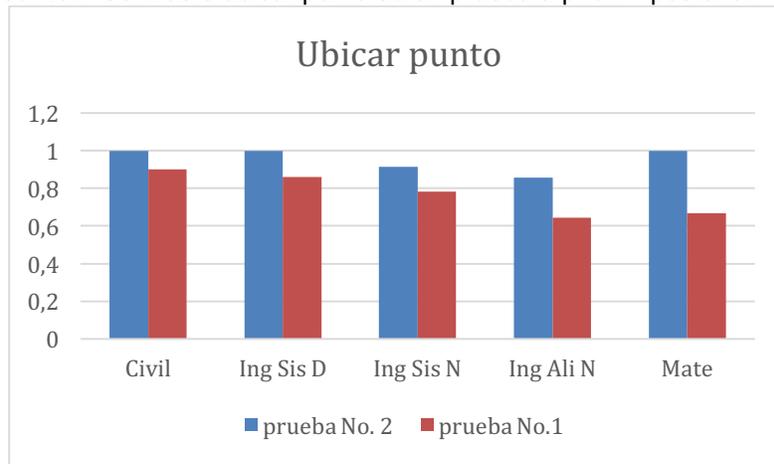
(Entrevistador) “como aprendió el procedimiento”

(IngSisDYeCa) “para ser sincera lo aprendí con ustedes y el software por qué cuando el profesor lo enseñó, lo explico muy rápido y todo y no le pude entender muy bien”

Conclusión

Al realizar el análisis de la respuesta de esta pregunta con la observación en la prueba a priori, se puede concluir que el procedimiento para ubicar un punto en el espacio 3d es claro, debido a que al aplicarse la prueba a priori a pesar de que ya se había visto en clase como se ubicaba un punto en espacio 3d, en general los estudiantes no tenían claro el procedimiento para ubicarlos, evidencia de ello, en el gráfico No.4 se muestra que mejoró en los grupos aplicado, el ubicar un punto en el espacio 3d, en donde 3 de los 5 grupos todos sus estudiantes ubicaron bien el punto solicitado.

Gráfico No.4 Contraste ubicar punto 3d en prueba a priori – posteriori



Fuente Propia.

En cuanto a la pregunta 3. para esta pregunta se tomaron cuatro estudiantes de diferentes programas que manifiestan la misma respuesta en su lenguaje.

(Entrevistador) ¿Cuál considera usted que es un mejor medio para visualizar las figuras 3d, en una hoja o en un computador?,

(IngCivDJuRo) “El uso del computador se presta mucho mejor”

(IngSisDSaVa) “Mejor el computador obvio”

(IngSisDSaVa) “El computador es más fácil manejar todo”

(IngSisNBrGr) “El software”

(Entrevistador) “por qué?”
(IngCivDJuRo) “Por qué al dibujarlo uno puede manipular el plano 3D”
(IngSisDSaVa) “Por qué es más fácil su manipulación”
(IngSisNBrGr) “Por qué uno puede mover todo con los botoncitos
(IngAliNAnMe) “Por qué se presta para manejarlo

(Entrevistador) “a que se refiere con manipular el plano 3D”
(IngCivDJuRo) “girarlo, ver las vistas de arriba, de abajo, de un lado, de ese tipo de cosas que no puede en una hoja”
(IngSisDSaVa) “es que en la hoja uno no ve lo de atrás y es más difícil saber cómo va en cambio en el software yo lo puedo mover y saber con en realidad es por todos lados”
(IngSisNBrGr) “Pues con los botones uno lo puede mirar por arriba y por los lados lo que es más fácil y también ponerlo a mover”
(IngAliNAnMe) “Por que se ve mejor los tres planos y se ve bien la forma del dibujo al voltearlo”

Conclusión

Al realizar un contrastes entre las respuestas, los estudiantes privilegiaron el uso de software como elemento mediador en la visualización y el análisis de la respuesta debido a su dinamismo al poder observar las figuras (objetos o superficies) en diferentes vistas, como, la frontal, lateral y superior; generan una idea más general del objeto, en palabras de (Cerón M, Hoyos S, & Aristizabal Z, 2013) “La base de la percepción está en la capacidad de operar cognitivamente sobre la información contenida en el estímulo” y al visualizar los objetos en todas sus vista otorga mayor información y experiencia al trabajar con objetos o superficies similares a la hora de plasmarlo en papel y lápiz y, relacionarlo con su respectiva información.

En aspectos generales referente a la pregunta 13

(Entrevistador) ¿Alguna otra apreciación referente a la prueba escrita o al trabajo con el software?
(IngCivDiv.Ra) manifiesta “La prueba y el uso del software nos permite identificar cuáles son las falencias que uno como estudiante, cuando graficas en R^3 respecta”
(IngAliNKaGu) “Excelente, otra metodología de evaluación”
(Entrevistador) “a que hace referencia”
(IngAliNKaGu) “Si, no siempre es pura teoría, da la manera de practicar y construir de forma mas adecuada que solo hacer el mismo procedimiento en una hoja”
(Entrevistador) “Le gustaría que se implementara este tipo de metodología”
(IngAliNKaGu) “Sería muy buena pues hay muchos programas como Geogebra pero no los enseñan ni utilizan en las clase, uno los utiliza para comprobar”
(IngAliNKaGu) (IngSisDCaCo) “Lo Bueno es que uno puede relacionar la gráfica con la ecuación”
(Entrevistador) “por qué dice eso”

(IngSisDCaCo) “pues porque uno mira una ecuación y sabe más o menos como es la gráfica y lo mismo pasa si uno tiene una gráfica, uno puede saber cómo puede ser la ecuación como en el paraboloides”

Conclusión

En términos generales se ve que la metodología empleando el software GanaliticaB3d desarrolla habilidades de visualización como lo manifiesta como lo manifiestan (Cantoral & Montiel, 2003). “La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta”.

Logros y dificultades evidenciadas.

Logros. El uso del software fomenta la exploración y el trabajo autónomo, permitiendo que el estudiante pueda reflexionar acerca su proceso cognitivo de tal manera que pueda corregir su error, además de permitir la rotación de las superficies para determinar sus elementos y realizar el cambio de representación de lo abstracto a lo gráfico, es decir un trabajo de tipo armónico.

Dificultades. La falta de recursos tecnológicos como el computador, aunque el software es de uso libre, para la implementación de la estrategia el trabajo se hace más productivo en la medida de que cada estudiante pueda explorar el software y realizar sus propios ejercicios.

Reflexión final.

Para obtener mejores resultados a la hora de mejorar las habilidades de visualización, se debe trabajar con una estrategia que involucre de manera articulada parte teórica-formal con el uso de software educativo que involucre la experimentación en un plano 3D como recurso para el proceso de enseñanza.

Referencias bibliográficas.

- Benedicto, clara. (2013). Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas. Universidad de Valencia. Valencia.
- Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 694-701.
- Cerón, M. Hoyos, E. y Aristizábal, J. (2012). Influencia de un software educativo en el mejoramiento del manejo de la perspectiva mediante la representación geométrica de sólidos y figuras. *Revista de Investigaciones*. Universidad del Quindío.
- Gonzato, M., Blanco, T., y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Revista números* pp. 99-117 Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_05.pdf.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10(2), 23–45.
- Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical adilities in schoolchildren*. Chicago, U.S.A.
- Krutetskii, V. A., Teller, J., Kilpatrick, J., & Wirszup, I. (1977). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 8). <https://doi.org/10.2307/748528>.
- López, L., Alanís, A., & Pérez, O. (2005). La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática, 131–137.
- Mota, J. F., & Laudares, J. B. (2013). Um Estudo de Planos, Cilindros e Quádricas, na Perspectiva da Habilidade de Visualização, com o Software Winplot/A Study of Planes, Cylinders and Quadrics, from the Perspective of Visualization Ability, with the Software Winplot. *Bolema*, 27(46), 497.
- Tonon, G. (2009). La entrevista semi-estructurada como técnica de investigación. *Reflexiones latinoamericanas sobre investigación cualitativa*, 46-68.
- Kawulich, B. (2005, May). La observación participante como método de recolección de datos. In *Forum: qualitative social research* (Vol. 6, No. 2, pp. 1-32).